Partiel de Mathématiques

du 1er Décembre 2007

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices sont indépendants. Une réponse ne vaut que si elle est démontrée par un argument explicite et juste. Le barème est donné à titre indicatif. Les calculettes et téléphones sont interdits.

Questions de cours. (2 points)

Étant donnée une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quelle est la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$? (1 point)

Que peut-on dire de l'image d'un segment $[a, b]$ par une application continue ? (1 point)

Exercice 1. (5,5 points) Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$E = \{(3u, u + v, u - 2v) \mid u,\ v \in \mathbb{R}\}.$$

1.a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (1 point)

1.b) Donner une base $\mathcal{B}$ de E et déterminer la dimension de E. (1,5 points)

1.c) Compléter la base $\mathcal{B}$ de E en une base de $\mathbb{R}^3$. (1 point)

1.d) Trouver un système d'équations linéaires définissant E. (2 points)

Exercice 2. (5,5 points) Soient les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

2.a) Le produit AB est-il bien défini ? Si oui, calculer le. Même question pour BA. (1,5 points)

2.b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}. Même question pour B. (3 points)

2.c) Résoudre $(x\ \ y\ \ z)A = (1\ \ 3\ \ 2)$. (1 point)

Exercice 3. (7 points)

On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = \dfrac{(\sin x)\sqrt[5]{x^2+1}}{\sqrt{x}}$.

3.a) Préciser l'ensemble de définition I de f et montrer que f est continue sur I. (1 point)

3.b) Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. (2 points)

3.c) Étudier la convergence des suites de terme général $f(2^n)$ et $f(\frac{1}{n+1})$. (2 points)

3.d) Démontrer que f est bornée sur I et atteint ses bornes. (2 points)
